**拟提名2024年度省科技奖项目自然科学奖公示材料**

**一、项目名称**

强不定非线性变分问题的研究

**二、提名单位（专家）及提名等级**

湖南工商大学、湖南省自然科学奖三等奖

**三、提名意见**

针对几类强不定非线性变分问题，在国家自然科学基金项目《几类强不定变分问题解的存在性与动力学研究》、《带梯度项的反应扩散系统解的存在性及动力学性态》和《薛定谔耦合系统驻波解的存在性及相关问题》的支持下，项目组系统深入研究了几类具有强不定变分结构的非线性椭圆方程和耦合系统的一些关键科学问题，提出了新的数学技巧和分析策略，成功解决了问题中的关键难题，在理论和应用方面取得了具有国际影响力的创新成果，从理论到应用促进了交叉学科的发展，引领拓展学科前沿，研究成果具有国际先进水平。本项目5篇代表性论文被SCI他引171次，单篇最高他引60次，4篇论文均入选ESI高被引论文。

该申报材料严格按照湖南省科学技术奖授奖条件撰写，真实有效，经公示， 无异议，同意提名湖南省自然科学奖三等奖。

**四、项目简介**

随着交叉学科的不断发展，变分学和非线性微分方程的交叉是目前国际上数学研究的重要领域。该领域因其前瞻性、交叉性和广泛的应用价值，长期以来受到数学界和物理学界的高度关注。本项目聚焦这一前沿热点领域，从强不定变分的视角出发，运用现代非线性分析方法系统研究了量子力学中的薛定谔方程和哈密顿椭圆系统，重点探讨其解的存在性及解的定性性质。本项目在理论和方法上均具有显著的原创性贡献。针对问题中的关键核心问题，提出了新的数学技巧和分析策略，成功解决了问题中的科学难题，在理论和应用方面取得了具有国际影响力的创新成果，从理论到应用促进了交叉学科的发展，引领拓展学科前沿。项目中问题的提出和解决，不仅深化了相关数学理论的发展，也为其他强不定非线性问题的研究提供了方法借鉴，具有重要的参考价值。主要发现点和创新点如下：

（1）创新性地研究了具有Trudinger-Moser临界指数增长的哈密顿椭圆系统基态解的存在性。构建了非线性项在无穷远处更具有普适性的新条件，减弱了经典的(AR)条件和Nehari严格单调条件。通过发展新的方法找到了刻画能量水平小于阈值的本质特征，提出了估计能量泛函的极小极大水平值完全不同的策略。完整回答了著名数学家Figueiredo等人[PRSE-2020]提出的公开问题，研究结果覆盖并推广了Figueiredo-意大利数学家Ruf [IUMJ-2004；DCDS-2011]和数学家陆国振教授[JGA-2014]的结果。

（2）首次研究了具有Hardy位势和梯度项的哈密顿椭圆系统基态解的存在性和渐近行为。通过发展非经典的Nehari流形方法和建立全局紧性策略等观点证明了基态解的存在性，利用不等式技巧和精细的分析方法证明了基态解随参数趋于零时的渐近性质和基态能量的极限状态。该结果是强不定型哈密顿椭圆系统的第一个结果；研究工作深刻阐述了Hardy位势对解和相关性质的影响，揭示了解的动力学现象。

（3）深入研究了具有竞争势的奇异扰动薛定谔耦合系统的半经典态问题。突破了传统方法依赖势函数和非线性项可微性以及能量泛函凸性的理论框架，使用广义Nehari流形方法和能量比较方法巧妙地克服了由泛函强不定特征和紧性缺失带来的双重困难，证明了系统半经典解的存在性和新的集中现象，揭示了竞争位势对集中现象的协同效应。通过尺度变换和平移技巧刻画了半经典问题与非半经典问题之间的相互联系；深刻分析了解的个数与位势函数临界点集的拓扑性质和几何性质的深层次关系。

（4）首次在强不定变分框架下证明了拟线性薛定谔方程高能量解的存在性。突破了已有文献中一直要求位势和非线性项严格正的基本假设，弥补了在双重变号作用下拟线性薛定谔方程研究的空白。引入拉伸技巧建立了全新的变分框架和空间分解，巧妙地绕开了能量泛函不定性和几何结构被破坏的困难；使用对偶变分技巧将拟线性问题转化为半线性问题，避开了拟线性高阶项非凸性的困难。

本项目的结果和发展的方法得到了波兰Radulescu教授、美国Krawcewicz教授、巴西Uberlandio教授、广州大学杰出青年基金获得者庾建设教授和厦门大学刘轼波教授等著名学者和众多同行的高度评价与大量正面引用，在国内外产生了重要的学术影响。本项目5篇代表性论文被SCI他引171次，单篇最高他引60次，4篇论文均入选ESI高被引论文。

依托项目的研究成果，项目组获得了3项国家自然科学基金，5项湖南省自然科学基金；3人获湖南省青年骨干教师。项目第一完成人2017年获湖南省优秀博士学位论文奖，且担任国际SCI期刊《[Math. Methods Appl. Sci.](https://mathscinet.ams.org/mathscinet/search/journal/profile?groupId=2289)》、《Complex Variables and Elliptic Equations》和《[Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo Series 2](https://www.springer.com/journal/12215/)》的编委。

**五、代表性论文专著目录**

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 序号 | 代表作及论文名称/刊名/作者 | 影响因子 | 年卷页码(xx年xx卷xx页) | 发表时间(年月 日) | 通讯作者(含共同) | 第一作者(含共同) | 国内作者(排序) | 他引总次数 | SCI他引次数 | 知识产权是否归国内所有 | 是否代表作 |
| 1 | Ground states for planar Hamiltonian elliptic systems with critical exponential growth/J. Differential Equations/秦栋栋，唐先华，张健 | 2.3 | 308 (2022) 130-159 | 2022年01月25日 | 张健\* | 秦栋栋 | 秦栋栋唐先华张健 | 37 | 37 | 是 | 是 |
| 2 | Ground state solutions for Hamilton elliptic system with inverse square potential/Discrete Contin. Dyn. Sys./张健，张文，唐先华 | 1.1 | 37 (2017) 4565-4583.2 | 2017年05月15日 | 张文\* | 张健 | 张健张文唐先华 | 22 | 22 | 是 | 是 |
| 3 | Semiclassical states for coupled nonlinear Schrödinger system with competing potentials/ [J. Geom. Anal.](https://mathscinet.ams.org/mathscinet/search/journaldoc.html?id=6415)/张健，张文 | 1.5 | [32(4)](https://mathscinet.ams.org/mathscinet/search/publications.html?pg1=ISSI&s1=456718)[(2022)](https://mathscinet.ams.org/mathscinet/search/publications.html?pg1=ISSI&s1=456718)114. | 2022年01月29日 | 张文\* | 张健 | 张健张文 | 45 | 45 | 是 | 是 |
| 4 | Infinitely many solutions of quasilinear Schrödinger equation with sign-changing potential/ Journal of Mathematical Analysis and Applications /张健，唐先华，张文 | 1.2 | 420(2014)1762-1775 | 2014年12月15日 | 唐先华\* | 张健 | 张健唐先华张文 | 60 | 60 | 是 | 是 |
| 5 | Existence of solutions for periodic elliptic system with general superlinear nonlinearity/Z. Angew. Math. Phys. /廖芳芳，唐先华，张健 | 1.6 | 66 (2015) 689-701. | 2014年05月07日 | 廖芳芳\* | 廖芳芳 | 廖芳芳唐先华张健 | 7 | 7 | 是 | 是 |
| 合计 | 171 | 171 |  |  |

**五、主要完成人**

1. **姓名：张健**，排名：1/3，技术职称：教授，工作单位：湖南工商大学。
2. **姓名：张文**，排名：2/3，技术职称：副教授，工作单位：湖南工商大学。
3. **姓名：廖芳芳，**排名：3/3，技术职称：教授，工作单位：湘南学院。

**六、主要完成单位**

湖南工商大学、湘南学院